凸多面体上のBernstein測度と関連する話題 (Bergman核と代数幾何への応用)

楯, 辰哉

数理解析研究所講究録
第 1613 巻 2008 年 125-143

凸多面体上の Bernstein 測度と関連する話題

楯　辰哉
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email: tate@math.nagoya-u.ac.jp

1 序

本稿では, 凸多面体の上の Bernstein 測度という概念とその性質, 特にその漸近展開について文献 [T] において得られた結果の概説と, 関連する話題として特に Bernstein-Poisson 近似と呼ばれるべき近似列と Dedekind-Riemann 和の漸近挙動を一次元の場合について述べる. Bernstein 測度についての結果の証明は [T] を参照されたい.

Bernstein 測度とは, 古典的に良く知られている Bernstein 多項式

$$B_N(f)(x)=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k(1-x)^{N-k}f(k/N),\quad f:[0,1]\to\mathbb{C} \tag{1}$$

の, 凸多面体への一般化に当たるものである.

もともと Bernstein 多項式 (1) は, Weierstrass の多項式近似定理, つまり「閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数は, 多項式で一様近似できる」という事実の証明のために Bernstein によって導入されたものである ([B]). この事実自身は初等的な議論で証明されるが, Bernstein 多項式の高次元化・一般化, そして $N\to\infty$ としたときの $B_N(f)$ の漸近挙動をここでは問題とする. Bernstein 多項式 (1) の $f\in C^\infty([0,1])$ に対する漸近展開は, Voronovsky, Bernstein ([Lo] を参照) によって得られている. Bernstein 多項式 (1) は, 一般次元の単体, そして $[0,1]$ の有限個の直積上に拡張されている. これらの挙動についても, 例えば Abel-Ivan ([AI]), Hörmander ([Hö2]) によって m-単体 P 上の Bernstein 多項式

$$B_N(f)(x)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0},\ \|\alpha\|\leq N}\binom{N}{\alpha}x^\alpha(1-\|x\|)^{N-\|\alpha\|}f(\alpha/N), \tag{2}$$

の $N\to\infty$ での漸近展開が $f\in C^\infty(P)$ に対して得られている. (ただしここで, $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ に対して $\|x\|=x_1+\cdots+x_m$ とおいた.) 最近 Zelditch は, $P\subset\mathbb{R}^m$ がいわゆる Delzant 条件を満たす格子凸多面体の場合に, P 上の関数に対して, Bernstein 多項式の類似物を構成した. 彼はこれを Bergman-Bernstein 近似 (Bergman-Bernstein 測度) と呼んでいて, P に対応する toric Kähler 多様体上の Bergman-Szegö 核を用いて定義されるもので, 彼は, projective toric Kähler 多様体上の Toeplitz 作用素の理論を用いて, その漸近展開を証明している.

本稿における話題は, Zelditch の論文 [Z2] を直接的な動機としているが, Zelditch [Z2] が Bergman-Bernstein 測度を導入した一つの動機は, 格子凸多面体 P 上の関数 f の Dedekind-Riemann 和

$$R_N(f;P):=\sum_{\alpha\in NP\cap\mathbb{Z}^m}f(\alpha/N) \tag{3}$$

の $N\to\infty$ の時の漸近挙動を調べることにあった. ここでは Zelditch のアプローチとは異なる方法で, より一般の凸多面体上での Bernstein 多項式の類似物の定義と構成を与え, その漸近挙動についての結果を述べ, さらに Zelditch の Bergman-Bernstein 測度との関連について得られた結果を紹介する.

また, 残念ながら我々の Bernstein 測度は Dedekind-Riemann 和 (3) の挙動への応用を考えると Zelditch の Bergman-Bernstein 測度には劣るようであるが, 我々の Dedekind-Riemann 和へ向けてのアプローチの延長線上にある Bernstein-Poisson 近似と呼ぶべき近似列の性質, 特にいわゆる Poisson の "少数の法則" との関連を一次元の場合に限って詳しく説明する.

2 凸多面体上の Bernstein 測度

この節では天下り的に, 次のような設定と定義を与える. 一般に $P \subset \mathbb{R}^m$ をコンパクトな凸集合とする (この段階では, 特に P が凸多面体でなくてよい). 本稿では, P の内部 $\mathrm{Int}(P)$ は空では無いものを取り扱う. P 上の確率測度 μ が与えられると, その重心

$$\pi(\mu) = \int_P z\, d\mu(z)$$

は μ の台の凸包に含まれることが分かる. 従って P が凸であるから $\pi(\mu) \in P$ となることに注意すると, P 上の確率測度全体の集合 $\mathcal{M}_1(P)$ から P への連続な全射

$$\pi : \mathcal{M}_1(P) \ni \mu \mapsto \pi(\mu) \in P$$

が定義される. ただしここで $\mathcal{M}_1(P)$ には弱 *-位相を考えている. この写像 $\pi : \mathcal{M}_1(P) \to P$ を重心写像と呼ぶことにする.

定義 1 $P \subset \mathbb{R}^m$ を $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ となるコンパクトな凸集合とする. 重心写像 $\pi : \mathcal{M}_1(P) \to P$ の連続切断 $\mathcal{B} : P \to \mathcal{M}_1(P)$ が P 上の Bernstein 測度であるとは, 以下の二つの性質を満たすものを言う.

(1) 任意の $f \in C(P)$ に対して, 式

$$B(f)(x) := \int_P f(z)\, d\mathcal{B}_x(z), \quad d\mathcal{B}_x := \mathcal{B}(x) \in \mathcal{M}_1(P), \quad x \in P,$$

で定まる関数 $B(f)$ について, $B(f) \in C^\infty(\mathrm{Int}(P)) \cap C(P)$ が成り立つ.

(2) ある C^∞ 写像 $K : \mathrm{Int}(P) \to \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ が存在して, 任意の $f \in C(P)$ に対して次が成り立つ:

$$\nabla B(f)(x) = \int_P f(z) K(x)(z - x)\, d\mathcal{B}_x(z), \quad x \in \mathrm{Int}(P).$$

ただしここで, $\mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ は m 次実対称行列全体のなす空間である.

行列値関数 K を Bernstein 測度 $\mathcal{B} : P \to \mathcal{M}_1(P)$ の定義行列と呼ぶ. ▮

定義 2 一般に $\mathcal{B} : P \to \mathcal{M}_1(P)$ を重心写像の連続切断とする. このとき $f \in C(P)$ に対して, P 上の関数 $B_N(f)$ を次で定義する.

$$B_N(f)(x) := \int_P f(z)\, d\mathcal{B}_x^N(z). \tag{4}$$

ただし, $d\mathcal{B}_x^N$ は次で定義される P 上の確率測度である:

$$d\mathcal{B}_x^N := (D_{1/N})_*(d\mathcal{B}_x * \cdots * d\mathcal{B}_x), \quad D_{1/N} : \mathbb{R}^m \ni x \mapsto x/N \in \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

重心写像の連続切断 $\mathcal{B} : P \to \mathcal{M}_1(P)$ が Bernstein 測度のとき, 関数 $B_N(f)$ を f の Bernstein 近似と呼ぶ. ▮

定義 3 重心写像の連続切断 $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ が, 有限集合 $S \subset P$ を台とするとは, 任意の $x \in \mathrm{Int}(P)$ に対して $\mathcal{B}(x) \in \mathcal{M}_1(P)$ の (測度としての) 台が S に等しいときをいう. 有限集合を台とする Bernstein 測度を, 簡単のため有限 Bernstein 測度と呼ぶことにする. ▮

注意 4 有限集合 $S \subset P$ を台とする重心写像の切断 $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ が存在するとき, 自動的に P は凸多面体となる. もともとの Bernstein 多項式 (1) が, あとで述べるように有限 Bernstein 測度で定義されていることを考えると, Bernstein 多項式を一般化する際, 凸多面体を考えるのは, この意味で自然である. なお, 一般のコンパクト凸集合にたいして, その上の Bernstein 測度が存在するかどうかは, 実は自明ではない. 例えば二次元閉円板上で考えても, その構成方法は単純ではないようである. しかし, 我々の主定理の一つは凸多面体上の有限 Bernstein 測度を構成する方法と特徴付けを与える. ▮

注意 5 $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ を Bernstein 測度とするとき, 式 (4) で定まる関数 $B_N(f)$ について, 任意の $f \in C(P)$ に対して $B_N(f) \in C^\infty(\mathrm{Int}(P)) \cap C(P)$ となる. つまり Bernstein 測度の定義条件 (1) は, 対応する Bernstein 近似の滑らかさを保証する. もともとの Bernstein 多項式は当然滑らかな関数であるから, Bernstein 多項式を一般化する際には自然な要請であろう. ただし, 一般に Bernstein 近似 $B_N(f)$ は多項式ではない. ▮

一般に, 重心写像の連続切断 $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ に対して, 式 (5) で測度 $d\mathcal{B}_x^N$ を定義し, 式 (4) で関数 $B_N(f)$ を定義した. このとき, 大数の法則から $B_N(f)$ は各点で f に収束することが分かるが, より強く $B_N(f)$ は f に一様収束する. この事実の証明は [T] に与えてあるが, 次の補題が重要となることだけ言及しておく.

補題 6 $P \subset \mathbb{R}$ を $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ であるコンパクト凸集合とする. また, 任意の自然数 N に対して作用素 $B_N: C(P) \to C(P)$ が与えられているとし, 作用素 B_N は次を満たすとする:

(1) $B_N(1) = 1$ であり, かつ任意の非負値関数 $f \in C(P)$ に対して $B_N(f)$ も非負値となる.

(2) 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, $\|\alpha\| \leq 2$ に対して $B_N(x^\alpha)$ は x^α に P 上一様収束する.

このとき任意の $f \in C(P)$ に対して $B_N(f)$ は f に P 上一様収束する. ▮

上の補題から, 特に B_N が重心写像の連続切断から式 (4), (5) で定義されている場合, 補題中の $\alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ が $\|\alpha\| \leq 1$ に対しては, $B_N(x^\alpha) = x^\alpha$ が成り立つ. つまり, 上の事実を示すためには $\|\alpha\| = 2$ の場合に $B_N(x^\alpha)$ が x^α に一様収束することのみ示せば良い. これは簡単ではあるが証明は [T] を参照されたい. (上記の補題とそれ以下の議論は東北大の板東教授に示唆していただいた. ここに感謝の意を表したい.)

注意 7 $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ を有限 Bernstein 測度として S をその台, $K: \mathrm{Int}(P) \to \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ をその定義行列とする. このとき, 任意の $\alpha \in S$ に対して, 以下を満たす P 上の関数 m_α が存在する.

(1) m_α は $\mathrm{Int}(P)$ 上正値であり, $m_\alpha \in C^\infty(\mathrm{Int}(P)) \cap C(P)$. 更に, 任意の $x \in P$ に対して $\sum_{\alpha \in S} m_\alpha(x) = 1$ を満たす.

(2) 任意の $x \in P$ に対して $\sum_{\alpha \in S} m_\alpha(x)\alpha = x$ を満たす.

(3) 任意の $x \in \mathrm{Int}(P)$ と $\alpha \in S$ に対して $\nabla m_\alpha(x) = m_\alpha(x) K(x)(\alpha - x)$ を満たす.

逆に, 上の三つの性質を満たす有限集合 $S \subset P$ と関数の族 $\{m_\alpha\}_{\alpha\in S}$ が与えられたとき,

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{\alpha\in S} m_\alpha(x)\delta_\alpha$$

で定義される写像 $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ は有限 Bernstein 測度となる. ∎

注意 8 いま, P を凸多面体とし $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ を重心写像の連続切断で, 有限台 $S \subset P$ を持つものとする. このとき, 任意の $\alpha \in S$ に対して連続関数 $m_\alpha \in C(P)$ が存在し,

$$d\mathcal{B}_x := \mathcal{B}(x) = \sum_{\alpha\in S} m_\alpha(x)\delta_\alpha$$

と表されるが, ここでは式 (5) で定義される確率測度 $d\mathcal{B}_x^N$ を具体的に表示しておく. まず有限集合 $S_N \subset NP$ を次で定義する:

$$S_N := \{\gamma \in NP\,;\ \text{ある } \beta_1,\ldots,\beta_N \in S \text{ が存在して } \gamma = \beta_1 + \cdots + \beta_N\}. \tag{6}$$

また, 任意の $\gamma \in S_N$ に対して連続関数 $m_N^\gamma \in C(P)$ を次で定義する:

$$m_N^\gamma(x) = \sum_{\substack{\beta_1,\ldots,\beta_N\in S \\ \gamma=\beta_1+\cdots+\beta_N}} m_{\beta_1}(x)\cdots m_{\beta_N}(x). \tag{7}$$

このとき, $d\mathcal{B}_x^N$ は次のように表示される.

$$d\mathcal{B}_x^N = \sum_{\gamma\in S_N} m_N^\gamma(x)\delta_{\gamma/N}. \tag{8}$$

上記の表示は Bergman-Bernstein 測度と我々の (有限) Bernstein 測度との比較を考える際, 特に有用である. ∎

3 Bernstein 測度の例

前節で定義した Bernstein 測度の例を挙げておく. なお上で述べた通り, より多くの例については主定理において構成する.

(1) P を標準 m-単体とする:

$$P = \{x = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m\,;\ x_j \geq 0,\ \|x\| := \sum_{j=1}^m x_j \leq 1\}.$$

$S = \{e_0 := 0, e_1, \ldots, e_m\}$ とする. ただし $\{e_j\}_{j=1}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の標準基底である. 関数 $m_{e_j} \in C^\infty(P)$ $(j = 0,1,\ldots,m)$ を次で定義する:

$$m_{e_0}(x) = 1 - \|x\|,\ m_{e_j}(x) = x_j,\ j = 1,\ldots,m.$$

このとき $\mathcal{B}(x) = \sum_{j=0}^m m_{e_j}(x)\delta_{e_j}$ で定まる写像 $\mathcal{B}: P \to \mathcal{M}_1(P)$ は P 上の Bernstein 測度であり, Bernstein 近似 $B_N(f)$ は (2) で与えられる. また定義行列は次で与えられる:

$$K(x) = \left(\frac{\delta_{ij}}{x_j} + \frac{1}{1-\|x\|}\right)_{ij}.$$

任意の $x \in \mathrm{Int}(P)$ に対して, $K(x)$ は可逆であり, 逆行列は次で与えられる:

$$A(x) = (x_j\delta_{ij} - x_ix_j)_{ij}.$$

この場合, 逆行列 $A(x)$ は $x \in \partial P$ に対しても連続であるが, これは一般に成り立つ. つまり, 任意の凸多面体 P (ただし $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ と仮定) とその上の Bernstein 測度 $\mathcal{B} : P \to \mathcal{M}_1(P)$ に対して,

$$A(x) = \int_P (z-x) \otimes (z-x)\, d\mathcal{B}_x(z), \quad x \in P \tag{9}$$

は, $x \in \mathrm{Int}(P)$ のとき, Bernstein 測度 $\mathcal{B}$ の定義行列 $K(x)$ の逆行列となることを示すことが出来る. 特に定義行列 $K(x)$ は正定値となる.

(2) 二つの凸多面体 P, Q (空でない内部を持つと仮定) とそれぞれの上の Bernstein 測度 $\mathcal{B}^P : P \to \mathcal{M}_1(P)$, $\mathcal{B}^Q : Q \to \mathcal{M}_1(Q)$ が与えられたとする. このとき $P \times Q$ はまた凸多面体であるが, 直積測度

$$\mathcal{B}(x,y) := \mathcal{B}^P(x)\mathcal{B}^Q(y), \quad (x,y) \in P \times Q$$

もまた, $P \times Q$ 上の Bernstein 測度となる. これから, 例えば, $P = [0,1]^m$ 上の測度として,

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^m} \prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j}(1-x_j)^{1-\alpha_j}\delta_\alpha, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in P$$

は $P = [0,1]^m$ 上の Bernstein 測度となる. ちなみに, この Bernstein 測度に対する Bernstein 近似は

$$B_N(f)(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_m=0}^N f(k_1/N, \ldots, k_m/N) \prod_{j=1}^m x_j^{k_j}(1-x_j)^{N-k_j}$$

となるが, これは先の標準 m-単体の例と共に良く知られた Bernstein 多項式の一般化である ([Lo]). なお, 上記の二つの例において $m = 1$ とすると, もともとの Bernstein 多項式 (1) を得る.

(3) これまでは, 有限 Bernstein 測度の例を述べてきた. 実際, 上記にみたように, 今まで知られていた Bernstein 多項式の一般化は有限台を持つ確率測度で定義されているようである. これは Zelditch の一般化についても例外ではない. しかし, 我々の Bernstein 測度の定義には, 台が有限集合ではないものも含まれている. ここでは, 滑らかな密度関数を持つ Bernstein 測度の例を紹介する. $\mathbb{R}$ 上の関数 μ を次で定義する:

$$\mu(\tau) := \frac{\mathrm{Todd}(\tau) - 1}{\tau} = \frac{1}{1-e^{-\tau}} - \frac{1}{\tau}.$$

$\chi(\tau) = (e^\tau - 1)/\tau$ とおくと $\mu(\tau) = (\log \chi(\tau))'$ が成り立つ. このとき $0 < \mu(\tau) < 1$ であり, $\mu : \mathbb{R} \to (0,1)$ は微分同相で, $\mu'(\tau) > 0$ であることが容易に分かる. μ の逆写像を $\tau = \tau(x)$ と書くことにする. $K(x) := 1/\mu'(\tau(x)) = \tau'(x)$, $x \in (0,1)$ とおく. このとき $A(x) := K(x)^{-1}$ は $A(0) = A(1) = 0$ とおくことによって, $[0,1]$ 全体に連続に拡張することができる. 開区間 $(0,1)$ 上の滑らかな関数 $\delta(x)$, そして $[0,1] \times (0,1)$ 上の滑らかな関数 $\rho(z,x)$ を次で定義する:

$$\delta(x) := \log \chi(\tau(x)) - x\tau(x), \quad \rho(z,x) := e^{-\delta(x) + (z-x)\tau(x)}, \quad (z,x) \in [0,1] \times (0,1).$$

このとき, 容易に分かるように,

$$\int_0^1 \rho(z,x)\,dz = 1, \quad \int_0^1 z\rho(z,x)\,dz = x, \quad \partial_x\rho(z,x) = \rho(z,x)K(x)(z-x)$$

が任意の $x \in (0,1)$, $z \in [0,1]$ に対して成り立つ. そこで任意の $x \in [0,1]$ に対して閉区間 $[0,1]$ 上の確率測度 $d\mathcal{B}_x$ を次で定義する:

$$d\mathcal{B}_x := \rho(z,x)\,dz, \quad x \in (0,1), \quad d\mathcal{B}_0 := \delta_0, \quad d\mathcal{B}_1 := \delta_1.$$

このとき任意の $f \in C([0,1])$ に対して

$$B(f)(x) := \int_0^1 f(z)\,d\mathcal{B}_x(z), \quad x \in [0,1]$$

とおけば, $B(f)$ は $(0,1)$ 上で滑らかである. 注意だが $\rho(z,x)$ 自身は $[0,1] \times [0,1]$ に連続に拡張することはできない. しかし, $f \in C^1([0,1])$ に対して部分積分を行うことによって,

$$B(f)(x) \to f(1),\ x \to 1, \quad B(f)(x) \to f(0),\ x \to 0$$

が成り立つことが分かる. さらに $\sup_{0<x<1} |B(f)(x) - B(g)(x)| \leq \|f - g\|_{C^0}$ が任意の $f, g \in C([0,1])$ に対して成り立つから $B(f) \in C([0,1])$ が任意の $f \in C([0,1])$ に対して成り立つことが分かる. 従って $d\mathcal{B}_x$ は $[0,1]$ 上の Bernstein 測度となる.

4 主定理

ここでは主定理を述べる. 記号は前節までの通りとする.

定理 9 P を $\mathbb{R}^m$ 内のコンパクト凸集合で $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ であるものとする. $\mathcal{B} : P \to \mathcal{M}_1(P)$ を P 上の Bernstein 測度とする. このとき, 任意の非負整数 ν に対して 2ν 階の微分作用素 $L_\nu(x,\partial)$ が存在し, 任意の $f \in C^\infty(P)$ に対して, 次の漸近展開が成り立つ.

$$B_N(f) \sim \sum_{\nu \geq 0} N^{-\nu} L_\nu(x,\partial) f. \tag{10}$$

特に, $L_0(x,\partial)$, $L_1(x,\partial)$ は以下で与えられる:

$$L_0(x,\partial)f = f(x), \quad L_1(x,\partial)f = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A(x)\nabla^2 f(x)).$$

ただしここで, $A(x)$ は式 (9) で定義される対称行列, そして $\nabla^2 f$ は f の Hesse 行列である. 上記の漸近展開は P 上一様に成り立つ. さらに上記の漸近展開は $\mathrm{Int}(P)$ 上何回でも微分可能で, 形式的に左辺と右辺の各項を同じ回数微分して得られる漸近展開式は $\mathrm{Int}(P)$ 上局所一様に成り立つ. ∎

注意 10 ここでは作用素 $L_\nu(x,\partial)$ たちの性質を述べておく. まず, $j = 1, \ldots, m$ に対して一階の微分作用素 D_j を次で定義する:

$$D_j f(x) = \langle A(x)\nabla f(x), e_j \rangle, \quad f \in C^\infty(P).$$

また, $(X_j f)(x) = x_j f(x)$ (かけ算作用素) とおく. このとき任意の非負整数 ν に対して次が成り立つ:

$$D_j L_\nu(x,\partial) = [L_{\nu+1}(x,\partial), X_j], \quad j = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

公式 (11) は, 漸近展開 (10) の微分可能性の証明中に得られるものであるが, 以下で説明するように, Bernstein 測度の定義を反映したものとなっている. まず, 式 (4), (5) で定義される Bernstein 近似 $B_N(f)$ の微分について, 次が成り立つことに注意する:

$$\nabla B_N(f)(x) = N \int_P f(z) K(x)(z-x)\,d\mathcal{B}_x^N(z), \quad x \in \mathrm{Int}(P). \tag{12}$$

この式を次のように書いてみる．まず $x \in \mathrm{Int}(P)$ のとき $K(x)$ の逆行列 $A(x)$ を式 (12) の左からかけ, e_j との内積をとると次のようになる:

$$D_j B_N(f)(x) = \int_P f(z)(z_j - x_j)\, d\mathcal{B}_x(z). \tag{13}$$

ここで, 式 (13) は, その連続性によって任意の $x \in P$ に対して成り立つことに注意されたい．従って式 (13) は次のように書きなおすことが出来る:

$$D_j B_N = B_N \circ X_j - X_j \circ B_N = [B_N, X_j], \quad j = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

式 (11) は式 (14) に形式的に漸近展開式

$$B_N \sim \sum_{\nu \geq 0} N^{-\nu} L_\nu(x, \partial)$$

を代入し, $L_0(x, \partial) = \mathrm{Id}$ を用いると得ることが出来る．このように, もし我々が作用素 B_N から定義を始めるなら, 公式 (14) を "Bernstein 作用素" の定義とすべきであろう．そして, もしそうして定義された作用素 B_N が漸近展開をもつならば, 式 (11) はごく自然に得られるべきものである．∎

注意 11 もし我々が漸近展開式 (10) のみを考えるならば, Bernstein 測度の定義の条件 (2) は必要ない．つまり重心写像の連続切断 $\mathcal{B} : P \to \mathcal{M}_1(P)$ で, Bernstein 測度の定義の条件 (1), つまり regularity の条件さえあれば, 停留位相法で, 対応する $B_N(f)$ は式 (10) の形 (少なくとも N のベキと第一項が同じ形) の漸近展開を次のように示すことが出来る．まず, $f \in C^\infty(P)$ を P の外にコンパクト台を持つ滑らかな関数として拡張し, 拡張した関数も f とかくことにする．このとき, 次が成り立つ:

$$B_N(f)(x) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(\xi) \varphi_{N,x}(\xi)\, d\xi = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^m \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{-N\Phi(x,y,\xi)} f(y)\, dy d\xi. \tag{15}$$

ただしここで $\hat{f}$ は f (を P の外にコンパクト台を持つ関数として拡張したもの) の Fourier 変換を表し, $\varphi_{N,x}$ は式 (5) で定義される確率測度 $d\mathcal{B}_x^N$ の特性関数

$$\varphi_{N,x}(\xi) = \int_P e^{i\langle z, \xi \rangle}\, d\mathcal{B}_x^N(z)$$

とした．また "相関数" $\Phi(x, y, \xi)$ は次で定義されるものである:

$$\Phi(x, y, \xi) = i\langle y, \xi \rangle - \log \varphi(x, \xi), \quad \varphi(x, \xi) = \int_P e^{i\langle z, \xi \rangle}\, d\mathcal{B}_x(z).$$

この相関数 Φ は複素数値だが, しかるべき停留位相の原理 (例えば [Höl] の Theorem 7.7.5) を用いれば, $B_N(f)$ の漸近展開を示すことが出来る．また, 漸近展開公式 (10) の各項に偶数階の微分作用素が現れる理由も停留位相法を用いた上記の議論を考えれば, 容易に了解されうる．

しかし, 問題は微分作用素 $L_\nu(x, \partial)$ の表示である．もし停留位相法を用いたのであれば, 漸近展開の第二項以後の表示はきわめて複雑になるといわざるを得ない．しかし, 定理 **9** で Bernstein 近似に限ると, 微分作用素 $L_\nu(x, \partial)$ のかなり具体的な表示公式を得ることが出来る ([T] 参照)．これが Bernstein 測度を導入した理由である．つまり, Bernstein 測度は, その漸近展開が具体的に計算しやすい形になるという点で優れている．∎

次に有限 Bernstein 測度の分類について述べる．これ以後 P は $\mathbb{R}^m$ 内の凸多面体で $\mathrm{Int}(P)\neq\emptyset$ となるものとする．$S\subset P$ を有限集合で，その凸包が P に一致するものとし，S 上の正の関数 $c:S\to\mathbb{R}_{>0}$ を固定する．写像 $\mu_{S,c}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ を次で定義する．

$$\mu_{S,c}(\tau):=\sum_{\alpha\in S}\frac{c(\alpha)e^{\langle\alpha,\tau\rangle}}{\sum_{\beta\in S}c(\beta)e^{\langle\beta,\tau\rangle}}\alpha,\quad \tau\in\mathbb{R}^m. \tag{16}$$

このとき，$\mathrm{Int}(P)\neq\emptyset$ という仮定から，$\mu_{S,c}:\mathbb{R}^m\to\mathrm{Int}(P)$ は微分同相となることが知られている ([Fu])．そこでその逆写像を $\tau_{S,c}:\mathrm{Int}(P)\to\mathbb{R}^m$ と書き，任意の $\alpha\in S$ に対して関数 $m_{S,c,\alpha}$ を次で定義する．

$$m_{S,c,\alpha}(x):=\frac{c(\alpha)e^{\langle\alpha,\tau_{S,c}(x)\rangle}}{\sum_{\beta\in S}c(\beta)e^{\langle\beta,\tau_{S,c}(x)\rangle}},\quad x\in\mathrm{Int}(P).$$

明らかに $m_{S,c,\alpha}$ は $\mathrm{Int}(P)$ 上正の滑らかな関数である．また $m_{S,c,\alpha}$ は P 全体に連続に拡張できる．(この事実はよく知られているようであるが，証明は面倒であるものの単純である．境界 ∂P での値を記述することも出来るが，ここでは省略する．証明は [T] を参照のこと.) 定義から $\sum_{\alpha\in S}m_{S,c,\alpha}=1$ を満たすが，さらに $\tau_{S,c}$ が $\mu_{S,c}$ の逆写像であることに注意すれば，

$$\sum_{\alpha\in S}m_{S,c,\alpha}(x)\alpha=x$$

が任意の $x\in P$ に対して成り立つことが分かる．従って，

$$\mathcal{B}_{S,c}(x):=\sum_{\alpha\in S}m_{S,c,\alpha}(x)\delta_\alpha$$

とおくと，$\mathcal{B}_{S,c}:P\to\mathcal{M}_1(P)$ は重心写像の連続切断となる．

定理 12 上に構成された連続切断 $\mathcal{B}_{S,c}:P\to\mathcal{M}_1(P)$ は有限 Bernstein 測度である．逆に有限集合 $S\subset P$ を台とする任意の有限 Bernstein 測度 $\mathcal{B}:P\to\mathcal{M}_1(P)$ に対して，ある正の関数 $c:S\to\mathbb{R}_{>0}$ が存在して $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{S,c}$ となる．∎

注意 13 上記の定理 12 によって，凸多面体上の有限 Bernstein 測度が完全に記述されたことになる．つまり凸多面体 P 上の有限 Bernstein 測度は P 内の有限集合 S で頂点をすべて含むもの (これは S の凸包が P 全体になるという条件と同値) と，その上の正値関数 $c:S\to\mathbb{R}_{>0}$ とで係数づけられるわけである．しかしここで注意しておくべきことは，有限集合 S でその凸包が P と一致するものを固定した際，S を台とする Bernstein 測度は S 上の正値関数 $c:S\to\mathbb{R}_{>0}$ で係数づけられるが，c として二つの異なる正値関数で得られる Bernstein 測度でも，一致する場合があるということである．実際，例えば $P\subset\mathbb{R}^m$ を標準 m-単体とし，$S=P\cap\mathbb{Z}^m$ とする．このとき，S を台とする重心写像の連続切断 $\mathcal{B}:P\to\mathcal{M}_1(P)$ の像は $\{\delta_\alpha\,;\,\alpha\in S\}$ の $\mathcal{M}_1(P)$ 内での凸包 Δ_S に値を持つ．ところが重心写像 $\pi:\mathcal{M}_1(P)\to P$ は Δ_S を P 自身に同相に写すことが分かるから，このような連続切断はただ一つである．(そして，これは前節で与えた Bernstein 測度の例になっている．) ∎

5　Bergman-Bernstein 測度と Bernstein 測度

我々が Bernstein 測度を導入するに至った動機の一つは，それを用いて一般の凸多面体上の Dedekind-Riemann 和 (3) の漸近挙動を調べることであった．しかし残念ながらこれはまだ成功していない．ここ

で注意だが, simple な格子凸多面体に対する Dedekind-Riemann 和の漸近挙動については Guillemin-Sternberg ([GS]) によって, その "Euler-Maclaurin 型" の漸近展開公式が得られている. Dedekind-Riemann 和を Bernstein 多項式の類似物を用いて調べるアイデアは Zelditch が最近用いていることは, 本稿冒頭で述べた. 実はこのアイデアは 1950 年の Otto Szasz ([Sz]) によっても示唆されている. (Szasz の論文 [Sz] の存在は Michael Stolz 氏より教わった. ここに感謝の意を表したい.) Szasz ([Sz]) は Bernstein 多項式の一般化として半直線上の Poisson 分布を用いて関数の近似列を構成していて, 彼の考えた作用素は現代では Szasz 作用素と呼ばれ, 一部の分野では今なお (その性質や半直線上での一般化が) 研究されているようである. これについては次節に詳しく述べることにして, この節では, Zelditch が定義した Bergman-Bernstein 測度を我々の状況の場合に説明し, 我々の導入した Bernstein 測度との対比に関する結果を概説する.

Zelditch は Delzant 格子凸多面体上で, 対応する toric Kähler 多様体と, その上の一般の Kähler 形式を用いて一般的に Bergman-Bernstein 測度を定義している. 以下で述べる定義は, 正確に言うと, 凸多面体が Delzant の場合には projective toric 多様体の上の Fubini-Study 形式に対する Zelditch の意味での Bergman-Bernstein 測度である. ここでは我々の状況にあわせて説明するが, Zelditch の定義の方法が分かるように述べておく.

そのために, ここでは $P \subset \mathbb{R}^m$ は格子凸多面体, つまり P の頂点がすべて $\mathbb{Z}^m$ の元であるものを考える. また, 有限 Bernstein 測度の台となるべき有限集合 S としては $S = P \cap \mathbb{Z}^m$ を考える. そして式 (6) で定義される集合 $S_N \subset NP$ を考え, 格子凸多面体 P が次の条件を満たすものと仮定する:

$$S_N = (NP) \cap \mathbb{Z}^m \quad (\text{つまり } (P \cap \mathbb{Z}^m)_N = NP \cap \mathbb{Z}^m).$$

これは全く自明ではなく, 実際これが成り立たない格子凸多面体も知られている. しかし, 任意の m 次元格子凸多面体 P に対して mP はこの性質を持つ. よってそれほど一般性を欠く仮定ではない. また, P が Delzant 条件を満たすときは, 上記の性質を満たすことが分かる. ここで m 次元格子凸多面体 P が Delzant 条件を満たすとは, P の任意の頂点 v を固定したとき, v から出る edge (1 次元 face) がちょうど m 本だけあり (これが simple という条件), それら m 本の edge が $\mathbb{Z}^m$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底の方向を向いている場合をいう.

以後しばらく, $P \subset \mathbb{R}^m$ は m 次元 Delzant 格子凸多面体と仮定し, Zelditch による Bergman-Bernstein 近似の定義を述べるために必要な toric 多様体を, 我々の状況に適合した形で導入する. $c : P \cap \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}_{>0}$ を一つ固定する. また $s = \#P \cap \mathbb{Z}^m$ とおく. m 次元複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m$ から $s-1$ 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^{s-1}$ への写像 $\Phi_c : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^{s-1}$ を次で定義する:

$$\Phi_c(z) := [c(\alpha)^{1/2} z^{\alpha}]_{\alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m}, \quad z \in (\mathbb{C}^*)^m.$$

ただしここで, z^α は $z \in (\mathbb{C}^*)^m$ の重み $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ の Laurent 単項式を表し, $\mathbb{C}P^{s-1}$ の点を斉次座標を用いて $[\zeta_\alpha]_{\alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m}$ と表した.

このとき, 我々が用いる toric 多様体 M_c は $\Phi_c((\mathbb{C}^*)^m)$ の Zariski 閉包として定義される. 一般にこのように定義された射影的代数多様体 M_c は特異点を持つが, 凸多面体 P が Delzant 条件を満たす場合には M_c が滑らかな多様体となることが知られている ([GKZ]). このような構成法は, 射影空間の Veronese 埋め込みの一般化と考えることも出来ることに注意しておく. P が Delzant 条件を満たす格子凸多面体の場合に, 我々は M_c 上に $\mathbb{C}P^{s-1}$ 上の Fubini-Study 形式 ω_{FS} を制限して得られる Kähler 形式 ω_c を考え, toric Kähler 多様体 (M_c, ω_c) を考える.

多様体 M_c には次のように m 次元実トーラス T^m が作用する: まず, s 次元実トーラス T^s の $\mathbb{C}P^{s-1}$ への自然な作用を考える. そして準同形 $\phi_c : T^m \to T^s$ を次で定義する:

$$\phi_c(e^{i\xi}) = (e^{i\langle \alpha, \xi \rangle})_{\alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m}, \quad e^{i\xi} = (e^{i\xi_1}, \ldots, e^{i\xi_m}) \in T^m, \ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m.$$

このとき, 多様体 M_c の構成法から容易に分かるように, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^m$ に対して $\phi_c(e^{i\xi}) \in T^s$ の作用は M_c を保つ. 従って T^m の M_c への作用が定義される.

こうして得られた T^m の M_c への作用は Hamilton 的な作用であり, 対応するモーメント写像 $\mu_c : M_c \to \mathfrak{t}_m^*$ は次の写像の合成で与えられる. ($\mathfrak{t}_m$ は T^m の Lie 環を表し, $\mathfrak{t}_m^*$ はその双対空間を表す. これらはベクトル空間としては $\mathbb{R}^m$ と同形である.)

$$\mu_c : M_c \xrightarrow{\iota_c} \mathbb{C}P^{s-1} \xrightarrow{\mu_s} \mathfrak{t}_s^* \xrightarrow{d\phi_c^*} \mathfrak{t}_m^*.$$

ただしここで $\iota_c : M_c \hookrightarrow \mathbb{C}P^{s-1}$ は包含写像, $\mu_s : \mathbb{C}P^{s-1} \to \mathfrak{t}_s^*$ は T^s の $(\mathbb{C}P^{s-1}, \omega_{\mathrm{FS}})$ への Hamilton 的作用に対するモーメント写像, そして $d\phi_c^* : \mathfrak{t}_s^* \to \mathfrak{t}_m^*$ は準同形 $\phi_c : T^m \to T^s$ の微分写像 $d\phi_c : \mathfrak{t}_m \to \mathfrak{t}_s$ の双対写像である.

M_c には複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m \cong \Phi_c((\mathbb{C}^*)^m)$ が自然に稠密に埋め込まれているが, $(\mathbb{C}^*)^m$ への μ_c の制限をここでは考える. 上記の T^m 作用は, 複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m$ の M_c への代数的作用から得られる. つまり, $(\mathbb{C}^*)^m \cong T^m \times \mathbb{R}^m$ を経由して得られるのである. ここで, 任意の $(e^{i\xi}, \tau) \in T^m \times \mathbb{R}^m$ は $e^{\tau/2+i\xi} \in (\mathbb{C}^*)^m$ と同一視した. このとき, $\mu_c : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathfrak{t}_m^* \cong \mathbb{R}^m$ は T^m-作用で不変なため, 写像 $\mu_c : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を定義する. このとき, 以下の補題が直接計算によって確かめられる.

補題 14 上で定義されたモーメント写像 $\mu_c : M_c \to \mathfrak{t}_m^*$ より引き起こされる写像 $\mu_c : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は式 (16) で定義される写像 $\mu_{S,c} : \mathbb{R}^m \to \mathrm{Int}(P)$ $(S = P \cap \mathbb{Z}^m)$ と一致する. ∎

Bergman-Bernstein 測度を定義するために, $(\mathbb{C}^*)^m \subset M_c$ 上で $\omega_c = \iota_c^*\omega_{\mathrm{FS}}$ は T^m-不変な Kähler ポテンシャル関数 φ_c を持つことに注意する (一般的な事実である. [Gu] を参照). 今の場合は φ_c は次のように具体的に与えることが出来る:

$$\varphi_c(z) = \log \sum_{\alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m} c(\alpha)|z^\alpha|^2, \quad z \in (\mathbb{C}^*)^m.$$

いま φ_c は $(\mathbb{C}^*)^m$ 上の関数と考えているが, これが T^m-作用で不変なため, やはり $\mathbb{R}^m$ 上の関数と考えることが出来る. こうして得られる $\mathbb{R}^m$ 上の関数を χ_c と書くことにする. このとき, Kähler 形式 ω_c に対する "symplectic ポテンシャル関数" u_c ([Z2] を参照) は凸多面体 P 上の関数として, 関数 χ_c の Legendre 双対関数で与えられる. 今の場合は次で与えられる:

$$u_c(x) = \langle x, \tau_c(x) \rangle - \chi_c(\tau_c(x)), \quad x \in \mathrm{Int}(P).$$

ここで $\tau_c : \mathrm{Int}(P) \to \mathbb{R}^m$ は μ_c の逆写像である.

この関数 u_c を用いて Zelditch は次のように Bergman-Bernstein 近似を定義した. M_c 上の直線束 $L_c = \iota_c^*\mathcal{O}(1)$ を考える. ここで $\mathcal{O}(1)$ は $\mathbb{C}P^{s-1}$ 上の超平面束 (つまりトートロジカル直線束の双対束) である. $c_1(L_c) = \omega_c$ に注意する. $L_c^{\otimes N}$ の正則切断全体の空間 $H^0(M_c, L_c^{\otimes N})$ は $NP \cap \mathbb{Z}^m$ の元を weight とする Laurent 単項式を基底として持つことが知られている ([Fu]). このとき, P 上の関数 f の Bergman-Bernstein 近似 $\nu_N(f)$ は次で定義される:

$$\nu_N(f)(x) = \frac{1}{\Pi_N(z)} \sum_{\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m} f(\gamma/N) \frac{e^{Nu_c(x) + \langle \gamma - Nx, \tau_c(x) \rangle}}{Q_{h^N}(\gamma)}. \tag{17}$$

ただしここで $Q_{h^N}(\gamma)$ は $\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ に対応した $H^0(M_c, L_c^{\otimes N})$ の元の, Fubini-Study エルミート計量による L^2-ノルムの 2 乗であり, $\Pi_N(z)$ は $H^0(M_c, L_c^{\otimes N})$ に対する Bergman-Szegö 核の対角成分 (M_c 上の関数) である. また, 式 (17) の和の各項は, $\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ に対応する $L_c^{\otimes N}$ の切断の Fubini-Study エルミート計量による L^2-正規化のエルミートノルムの 2 乗である. 式 (17) において

$z \in (\mathbb{C}^*)^m \subset M_c$ と $x \in \mathrm{Int}(P)$ とは $\mu_c(z) = x$ で関連づいている. (Zelditch ([Z2]) は, まさに式 (17) を定義としている. もちろん和の各項を $|z^\gamma|^2_{h^N}$ などと書いた方が分かりやすいかもしれないが, これが凸多面体 P 上の対象物であることを強調することが目的かもしれない.)

上の構成法をみると, toric 多様体 M_c 上で Fubini-Study 形式以外の, より一般の Kähler 形式 ω を考え, 直線束 L で $c_1(L) = \omega$ となっている状況で, Bergman-Bernstein 近似が定義される. 実際 Zelditch はこのような一般的な設定で定義している. しかし Zelditch の定義では, 多様体は一般であるものの, 凸多面体は Delzant のものを固定している. 我々は以下で, 上記の定義を一般の凸多面体に拡張することを考える. そこで注意だが, 次が成り立つ:

$$Q_{h^N}(\gamma) = \int_P e^{Nu_c(x) + \langle \gamma - Nx, \tau_c(x) \rangle}\, dx.$$

これは, $\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ に対応した $H^0(M_c, L_c^{\otimes N})$ の元の Fubini-Study ノルムの 2-乗は T^m-作用で不変であるから, それを凸多面体 P 上の関数と考え, P 上の積分に書き換えた式である. 一方, (S, c) というデータ ($S = P \cap \mathbb{Z}^m$) から, 我々の Bernstein 測度

$$\mathcal{B}_{S,c}(x) = \sum_{\alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m} m_{S,c,\alpha}(x) \delta_\alpha$$

が定義され, その $1/N$ 縮小された N 回 convolution $d\mathcal{B}_x^N$ は式 (7) で定まる関数 $m_N^\gamma(x)$ を用いて式 (8) と表示されていた.

補題 15 $m_N^\gamma(x)$ を式 (7) で $m_{S,c,\alpha}$ から定まる関数とし, 任意の $\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ に対して

$$R_N(\gamma) = \int_P m_N^\gamma(x)\, dx, \quad \Pi_N(x) = \sum_{\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m} \frac{m_N^\gamma(x)}{R_N(\gamma)}$$

とおく. このとき,

$$\nu_N(f)(x) = \frac{1}{\Pi_N(x)} \sum_{\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m} f(\gamma/N) \frac{m_N^\gamma(x)}{R_N(\gamma)}$$

が成り立つ. ▮

上記の補題は, 次の式が成り立つことから容易に示される:

$$m_N^\gamma(x) = \mathcal{P}_N(\gamma) e^{Nu_c(x) + \langle \gamma - Nx, \tau_c(x) \rangle}.$$

ただしここで $\mathcal{P}_N(\gamma)$ は原点から γ にいたる lattice path のうち各ステップが重み c を持つ $P \cap \mathbb{Z}^m$ の元で書き表されるものの個数である:

$$\mathcal{P}_N(\gamma) = \sum_{\substack{\beta_1, \dots, \beta_N \in P \cap \mathbb{Z}^m \\ \gamma = \beta_1 + \cdots + \beta_N}} c(\beta_1) \cdots c(\beta_N). \tag{18}$$

重み付き lattice path の個数 $\mathcal{P}_N(\gamma)$ の $N \to \infty$ における漸近挙動については [TZ] で調べているが, 十分調べられたとは言い難い. 次節を参照のこと.

つまり, この関数 m_N^γ は γ に対応する $L_c^{\otimes N}$ の正則切断の Fubini-Study ノルムの 2 乗の定数 ($\mathcal{P}_N(\gamma)$) 倍であり, Bergman-Bernstein 近似は, Bernstein 近似をさらに, その係数関数の P での積分が 1 となるように正規化されて定義されている.

注意 16 式 (17) に現れた Bergman-Szegö 核関数 $\Pi_N(z)$ は M_c 上の関数として T^m-作用で不変である. 従って P 上の関数を定めるが, それが $\Pi_N(x)$ である. ▮

そこで, 補題 15 を鑑み, 一般の凸多面体 P に対して次のように定義する.

定義 17 $P \subset \mathbb{R}^m$ を一般の (格子凸多面体とは限らない) 凸多面体とし, $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ と仮定する. 有限集合 $S \subset P$ でその凸包が P となるものを取り固定する. また $c : S \to \mathbb{R}_{>0}$ を固定し, データ (S, c) から定まる Bernstein 測度を $\mathcal{B}_{S,c}(x) = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha(x)\delta_\alpha$ とする. さらに, 式 (7), (8) で定まる確率測度 $d\mathcal{B}_x^N$ を

$$d\mathcal{B}_x^N = \sum_{\gamma \in S_N} m_N^\gamma(x)\delta_{\gamma/N} \tag{19}$$

とする. このとき P 上の Bergman-Bernstein 測度 $d\nu_x^N$ を次で定義する:

$$d\nu_x^N = \frac{1}{\Pi_N(x)} \sum_{\gamma \in S_N} \frac{m_N^\gamma(x)}{R_N(\gamma)} \delta_{\gamma/N}. \tag{20}$$

ただし, 任意の $\gamma \in S_N$ に対して, 先と同様に,

$$R_N(\gamma) = \int_P m_N^\gamma(x)\,dx, \quad \Pi_N(x) = \sum_{\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m} \frac{m_N^\gamma(x)}{R_N(\gamma)} \tag{21}$$

とおいた. ▮

上のように定義された Bergman-Bernstein 測度 $d\nu_x^N$ と我々の Bernstein 測度 $\mathcal{B}_{S,c}$ から定義される測度 $d\mathcal{B}_x^N$ の関連については次が成り立つ.

命題 18 $P \subset \mathbb{R}^m$ を一般の凸多面体で $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ と仮定する. データ (S, c) を上記のように固定し, 対応する Bernstein 測度 $\mathcal{B}_{S,c}$ から式 (7), (8) で定義される測度を $d\mathcal{B}_x^N$ とする. また $R_N(\gamma)$ は式 (21) で定まっているとし, これを S_N 上の関数と考える. また $d\nu_x^N$ を式 (20) で定まる Bergman-Bernstein 測度とする. このとき, 任意の自然数 N を固定したとき, 四つの条件

(1) $R_N(\gamma)$ は S_N 上定数;

(2) 関数 $\Pi_N(\gamma)$ は P 上定数;

(3) $\pi(d\nu_x^N) = x$ が任意の $x \in P$ に対して成り立つ;

(4) $d\nu_x^N = d\mathcal{B}_x^N$ が任意の $x \in P$ に対して成り立つ;

は互いに同値である. ▮

注意 19 条件 (2) と (3) の同値性は次の公式から得られる:

$$\frac{1}{N} D \log \Pi_N(x) = \pi(d\nu_x^N) - x.$$

ただし $D = A(x)\nabla$ は 1 階の微分作用素である. この公式は直接計算で示される. よって上記の命題において非自明なのは (2) から (4) を示すことである. この証明については省略する ([T] を参照). なお, 条件 (2) は P が Delzant 格子凸多面体の場合, 上記のように Bergman-Szegö 核 $\Pi_N(z)$ が定数であることを意味している. これは Donaldson ([D]) の意味で, $L_c^{\otimes N}$ 上の Fubini-Study エルミート計量が balanced metric であるということを意味している. つまり上記の命題は Fubini-Study エルミート計量が balanced metric であるための条件を測度論的にとらえていると考えることが出来る. 一般の toric 多様体上の正直線束のエルミート計量が balanced metric であるということの測度論的特徴付けを, 上記の命題のように得ることが出来るかどうかについては, 筆者は知らない. ▮

注意 20 Bergman-Bernstein 測度 $d\nu_x^N$ と Bergman-Bernstein 近似 $\nu_N(f)$ との関連は, 次の式で与えられることは, 定義から自明である:

$$\nu_N(f)(x) = \int_P f(z)\, d\nu_x^N(z).$$

また, Bergman-Bernstein 測度 $d\nu_x^N$ の定義より, P が Delzant 格子凸多面体で $S = P \cap \mathbb{Z}^m$ のとき次が成り立つ:

$$\int_P \Pi_N(x)\nu_N(f)(x)\, dx = \sum_{\gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m} f(\gamma/N) = R_N(f;P).$$

上記の式より, Dedekind-Riemann 和 $R_N(f;P)$ の $N \to \infty$ のときの漸近挙動を調べるには, $\Pi_N(x)$ の漸近挙動と $\nu_N(f)$ の漸近挙動が分かればよい. Bergman-Szegö 核 $\Pi_N(x)$ については (M_c が滑らかだから) その漸近挙動はよく知られている ([Z1]). Zelditch は [Z2] において $\Pi_N(x)\nu_N(f)$ の漸近挙動を Toeplitz 作用素の理論を用いて調べており, その結果を用いて Dedekind-Riemann 和 $R_N(f;P)$ の挙動を調べている. 我々の Bernstein 測度では, 直接は式 (21) で定義される S_N 上の関数 $R_N(\gamma)$ が定数ではないので, このような手法は難しい. またこれが定数となるようなデータ $(S = P \cap \mathbb{Z}^m, c)$ が存在するかどうかと考えた際, 命題 18 により, そのような $(S = P \cap \mathbb{Z}^m, c)$ が存在すれば (P が Delzant 格子凸多面体の場合) M_c 上の超平面束 $L_c^{\otimes N}$ の Fubini-Study エルミート計量が balanced metric でなければならないが, これは大変強い性質のように思われる. 従って, Dedekind-Riemann 和 $R_N(f;P)$ を一般の凸多面体 P で調べるには, Bernstein 測度から, 一度 Bergman-Bernstein 測度を考え, その漸近挙動と $\Pi_N(x)$ の挙動を調べる必要があるように見える.

しかし, Guillemin-Sternberg ([GS]) の Dedekind-Riemann 和 $R_N(f;P)$ に対する "漸近的 Euler-Maclaurin 公式" の証明では, 凸多面体そのものではなく, 頂点を基点とする凸錐体 (wedge と彼らは呼んでいる) 上の Dedekind-Riemann 和の漸近挙動が本質的な役割を果たしている. 次節では, このようなアイデアと我々の Bernstein 測度のアイデアを融合させて, 一次元の場合の古典的によく知られた "漸近的 Euler-Maclaurin 公式" を証明する. ∎

6 Bernstein-Poisson 近似と漸近的 Euler-Maclaurin 公式

もともとの $[0,1]$ 上の Bernstein 多項式

$$B_N(f)(x) = \sum_{k=0}^{N} m_N^k(x) f(k/N), \quad m_N^k(x) = \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}$$

は, x を平均とする二項分布

$$d\mathcal{B}_x^N = \sum_{k=0}^{N} m_N^k(x)\delta_{k/N}$$

から作られている. そして我々は $d\mathcal{B}_x^N$ を Bernstein 測度 (の $1/N$ 縮小された N 回 convolution (式 (8) を参照) と呼んでいた.

二項分布において $\lambda > 0$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定して $x := \lambda/N$ とすると $N \to \infty$ で次が成り立つ:

$$\lim_{N\to\infty} m_N^k(\lambda/N) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

これがいわゆる "Poisson の少数の法則 (Poisson's law of rare events ([I]))" (の簡単な場合) であり, N 個の確率が小さい独立な事象に対して, これらが起こりうる確率を表す分布が Poisson 分布

$$d\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P}(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \ell_k(\lambda)\delta_k, \quad \ell_k(\lambda) := \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

で近似できることを言い表している．この Poisson 分布 $d\mathcal{P}_\lambda$ の重心 (平均) は λ そのものである．そこで Bernstein 近似のときと同様に, $d\mathcal{P}_\lambda$ の $1/N$ 縮小された N 回 convolution (式 (8) を参照) $d\mathcal{P}_\lambda^N$ を作ると, 次のような $[0,\infty)$ 上の確率測度を得る:

$$d\mathcal{P}_\lambda^N = \sum_{k=0}^{\infty} \ell_N^k(\lambda)\delta_{k/N}, \quad \ell_N^k(\lambda) = \frac{(N\lambda)^k}{k!}e^{-N\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

これを用いて Bernstein 近似 (式 (4) 参照) の類似で次のような関数族を考える:

$$P_N(f)(\lambda) := \int_0^{\infty} f(z)\, d\mathcal{P}_\lambda^N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell_N^k(\lambda) f(\lambda/N).$$

この関数は, 実は Szasz Otto [Sz] が既に考えていた．現在では作用素 $f \mapsto P_N(f)$ は Szasz 作用素と呼ばれているようである．彼の論文 [Sz] の最終節では, これを用いて $[0,\infty)$ 上の Dedekind-Riemann 和

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} f(k/N)$$

の挙動を調べることが示唆されている．それは, 次が成り立つことに理由づけられている．

補題 21 簡単のため f は $\mathbb{R}$ 上の Schwartz 関数 ($f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と書く) とする．このとき $P_N(f)$ は $[0,\infty)$ 上可積分であり,

$$\int_0^{\infty} P_N(f)(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} f(k/N)$$

が成り立つ．▮

Szasz 以後この方向での研究は, 少なくとも著者は見いだすことが出来なかったが, 以下ではこのアプローチを遂行するとともに, その議論の, 一般の凸多面体と凸錐体上への拡張の方向を模索してみる．まず, 我々の主定理 9 の証明あるいは Hörmander [Hö2] の議論を用いると次を証明することが出来る．

命題 22 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 任意の自然数 $n > 1$ と $2n > 2K > n+1$ を満たす任意の実数 K に対して次が成り立つ:

$$\begin{gathered} P_N(f)(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} N^{-k} M_k(\lambda, d/d\lambda) f + S_{n,N}(\lambda), \\ |S_{n,N}(\lambda)| \le C N^{-n} \lambda^{-(2K-n)}. \end{gathered} \tag{22}$$

ただし, $M_k(\lambda, d/d\lambda)$ は $2k$ 階の微分作用素で, 次で定義される．

$$M_k(\lambda, d/d\lambda) = \sum_{\alpha=k}^{2k} \frac{1}{\alpha!} p(\alpha, \alpha-k)\lambda^{\alpha-k}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\alpha}. \tag{23}$$

ここで, 係数 $p(\alpha, t)$ は,

$$p(\alpha, t) = \sum_{l=0}^{t} \binom{\alpha}{l}(-1)^l S(\alpha-l, t-l) \tag{24}$$

と, 第二種 Stirling 数 $S(n,k)$ を用いて書き表される．▮

ここで第二種 Stirling 数 $S(n,k)$ $(0 \le k \le n)$ とは次の漸化式を満たす数列である:

$$\begin{gathered} S(0,0)=1,\ S(n,0)=0,\ S(n,1)=S(n,n)=1, \\ S(n+1,k)=kS(n,k)+S(n,k-1). \end{gathered} \tag{25}$$

なお, 通常は $k>n$ に対して $S(n,k)=0$ とおく. これは $S(n,k)$ が n 個の元を持つ集合を k 個の空でない部分集合に分割する方法の個数を表していることから自然である.

命題 22 の証明 まず $\lambda>0$ を中心とする Taylor 展開

$$f(k/N)=\sum_{\alpha=0}^{2n-1}\frac{f^{(\alpha)}(\lambda)}{\alpha!}(k/N-\lambda)^{\alpha}+\frac{1}{(2n-1)!}(k/N-\lambda)^{2n}\int_0^1(1-t)^{2n-1}f^{(2n)}(\lambda+t(k/N-\lambda))\,dt$$

を $P_N(f)(\lambda)$ の定義式に代入すると次を得る:

$$P_N(f)(\lambda)=\sum_{\alpha=0}^{2n-1}\frac{f^{\alpha}(\lambda)}{\alpha!}N^{-\alpha}J_{N,\alpha}(\lambda)+S_{n,N}(\lambda). \tag{26}$$

ここで関数 $J_{N,\alpha}(\lambda)$ と $S_{n,N}(\lambda)$ は次で定義されている.

$$\begin{aligned} J_{N,\alpha}(\lambda)&=N^{\alpha}\int_0^{\infty}(z-\lambda)^{\alpha}\,d\mathcal{P}_{\lambda}^{N}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\ell_N^k(\lambda)(k-N\lambda)^{\alpha}, \\ S_{n,N}(\lambda)&=\frac{1}{(2n-1)!}N^{-2n}\sum_{k=0}^{\infty}\ell_N^k(\lambda)(k-N\lambda)^{2n}\int_0^1(1-t)^{2n-1}f^{(2n)}(\lambda+t(k/N-\lambda))\,dt. \end{aligned} \tag{27}$$

ここで $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ より, $2n>2K>n+1$ となる $K>0$ に対して $|f^{(2n)}(\lambda+t(k/n-\lambda))|\le C/[(1-t)\lambda]^{2K}$ と評価することで, 次を得る:

$$|S_{n,N}(\lambda)|\le CN^{-2n}\lambda^{-2K}J_{N,2n}(\lambda). \tag{28}$$

従って命題を示すには関数 $J_{N,\alpha}(\lambda)$ (α は自然数) を調べる必要がある. まず $\ell_N^k(\lambda)=(N\lambda)^k e^{-N\lambda}/k!$ であったことに注意する. $E=\lambda(d/d\lambda)$ とおくと,

$$(E\ell_N^k)(\lambda)=\ell_N^k(\lambda)(k-N\lambda)$$

が成り立つ. これを用いると $J_{N,\alpha}(\lambda)$ は次のような漸化式を満たすことが分かる:

$$\begin{gathered} J_{N,0}(\lambda)=1,\quad J_{N,1}(\lambda)=0,\quad J_{N,2}(\lambda)=N\lambda, \\ J_{N,\alpha+1}(\lambda)=(EJ_{N,\alpha})(\lambda)+\alpha N\lambda J_{N,\alpha-1}(\lambda). \end{gathered}$$

この漸化式より $J_{N,\alpha}$ は次のような多項式となることが分かる:

$$J_{N,\alpha}(\lambda)=\sum_{j=0}^{[\alpha/2]}p(\alpha,j)(N\lambda)^j.$$

ただしここで $[\alpha/2]$ は $\alpha/2$ を超えない最大の整数であり, 定数 $p(\alpha,j)$ が式 (24) を満たすことが, この係数の漸化式をたてることによって示される. そこでこれを式 (26) の和の部分に代入して書き直し, それを N^{-n} の項までで打ち切れば, f が Schwartz 関数であることより主張を得る. ∎

注意 23 半直線 $[0,\infty)$ 上の Bernstein-Poisson 近似 $P_N(f)$ は

$$P_N(f)(\lambda) = P_1(f)(N\lambda)$$

を満たす. この式は定義から明らかである. しかしこの式は $P_N(f)$ がもともとの Bernstein 多項式より扱いやすいことを示唆する. 上式が成り立つ理由は, 二項分布から Poisson 分布へ移行する際に極限 (law of rare events) をとっているためと思われる. ▮

式 (22) は, その error の λ を含む評価によって積分することが出来る. つまり $P_N(f)$ を積分し, そこに漸近展開 (22) を代入し, 微分作用素 $M_k(\lambda, d/d\lambda)$ の表示を用いて具体的に計算すると次を得る.

補題 24 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{gathered} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} f(k/N) = \int_0^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda + \sum_{k=1}^{n-1} N^{-k} c_k f^{(k-1)}(0) + O(N^{-n}), \\ c_k = \sum_{\alpha=k}^{2k} \frac{(\alpha-k)!}{\alpha!}(-1)^{\alpha-k+1} p(\alpha, \alpha-k) \end{gathered} \tag{29}$$

が成り立つ. ▮

上の係数 c_k は $k=0$ についても定義されていることに注意する. 係数 c_k の $p(\alpha, \alpha-k)$ の部分に第二種 Stirling 数を用いた表示を代入してまとめ直すと次が得られる:

補題 25 $-c_0 = 1$, $-c_1 = -1/2$, $-c_2 = 1/12$ であり, 一般に

$$-c_k = (k+1)\binom{2k}{k}^{-1} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l+1}\binom{2k}{k+l} S(k+l, l) \tag{30}$$

が成り立つ. ▮

さて, Bernoulli 数 B_n とは次のように定義されていたことを思い出す. 原点における Todd 関数 の Taylor 展開を

$$\mathrm{Todd}(-\tau) = \frac{\tau}{e^{\tau}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\tau^n$$

としたとき $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, $b_2 = 1/6$, $b_{2n+1} = 0$ $(n \geq 1)$ であり $b_{2n} = (-1)^{n-1}B_n$ とおいたときの B_n $(n \geq 1)$ が Bernoulli 数である. ここで, 数列 b_n, 第二種 Stirling 数 $S(n,k)$ そして Catalan 数 $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ との関連を示す公式 ([GKP])

$$\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} b_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l+1}\binom{2k}{k+l} S(k+l, l) \tag{31}$$

を用いると $-c_k = b_k/k!$ が分かり, 従って次が成り立つ:

命題 26 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} f(k/N) \sim \int_0^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{f(0)}{2N} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k B_k}{(2k)!} f^{(2k-1)}(0) N^{-2k}$$

が成り立つ. ▮

この公式が $[0,\infty)$ 上の "漸近的 Euler-Maclaurin 公式" と先に呼んだものであり, Guillemin-Sternberg ([GS]) は, 解析的な道具としてこれを用いて simple な格子凸多面体上の Dedekind-Riemann 和の一般的な "漸近的 Euler-Maclaurin 公式" を得ている. Guillemin-Sternberg は [GS] において命題 **26** を Poisson の和公式を用いて証明しているが, 上記はその別証明になっている.

注意 27 論文 [GS] の証明の過程における議論を用いると, 逆に上の公式 (31) を式 (29), (30) を用いて次のように導くことも出来る. まず, 式 (29) において, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ として特に $[0,\infty)$ 上では $e^{-\lambda}$ となり, $(-\infty,-1]$ において 0 となる関数をとる. この f に対して公式 (29) を書くと次のようになる:

$$\mathrm{Todd}(1/N) \sim \sum_{k\geq 0}(-1)^{k-1}c_k N^{-k}.$$

この漸近展開式は, $\mathrm{Todd}(1/N)$ が N^{-1} についてのベキ級数に展開されることから収束し, 係数を比較することによって $-c_k = b_k/k!$ を, そして公式 (31) を得る. ▮

今までの議論において, 凸多面体 P として $[0,1]$ と, 頂点 0 を基点とする凸錐体 $[0,\infty)$ を考え, それらの上で二項分布 (Bernstein 測度) の Poisson's law of rare events を経由し, 極限で現れる Poisson 分布から Bernstein 近似の類似を作り, その漸近挙動を調べることで凸錐体 $[0,\infty)$ 上の Dedekind-Riemann 和の漸近公式を得ることが出来た.

この議論を一般の凸多面体上に拡張することを考えると, 自然と次のような "rare event" にあたる問題に直面する. その問題を定式化するために, 改めて記号を準備する. $P \subset \mathbb{R}^m$ を $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ となる凸多面体とし, $S \subset P$ を有限集合で, その凸包が P と一致するもの, c を S 上の正値関数とし固定する. また, データ (S,c) で定義される Bernstein 測度を $\mathcal{B}_{S,c}$ として

$$\mathcal{B}_{S,c}(x) = \sum_{\alpha\in S} m_\alpha(x)\delta_\alpha, \quad x \in P$$

と表示し, 任意の自然数 N と $\gamma \in S_N$ (S_N の定義は式 (6) 参照) に対して, 関数 $m_N^\gamma(x)$ を式 (7) で定義する.

P の任意の頂点 v を固定して, v を含む P の closed facet ($m-1$ 次元 face) 全体の集合を $\mathcal{F}(v)$ とする. 任意の $F \in \mathcal{F}(v)$ は, あるベクトル $u_F \in \mathbb{R}^m$ と実数 c_F を用いて

$$F = P \cap H(u_F, c_F), \quad P \subset K(u_F, c_F)$$

と表される. ただしここで任意の $u \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$K(u,c) = \{x \in \mathbb{R}^m;\ \langle x,u\rangle \leq c\}, \quad H(u,c) = \{x \in \mathbb{R}^m;\ \langle x,u\rangle = c\}$$

とおいた. そこで任意の頂点 v に対して

$$W(v) := \bigcap_{F\in\mathcal{F}(v)} K(u_F, c_F)$$

とおき, v を基点とする wedge と呼ぶ. $C(v) := W(v) - v$ は原点を基点とする凸多角錐体であることに注意する.

問題 P を格子凸多面体とし, $S = P \cap \mathbb{Z}^m$ とする. また $S_N = NP \cap \mathbb{Z}^m$ と仮定する. このとき任意の頂点 v と $\alpha \in W(v)$, $\lambda \in W(v)$ に対して, 極限

$$\lim_{N\to\infty} m_N^{\alpha+(N-1)v}\left(\frac{1}{N}\lambda + \left(1-\frac{1}{N}\right)v\right)$$

を求めよ．また，極限は $\lambda \in W(v)$ の関数であるが，この関数の挙動を調べよ．▮

論文 [STZ], [TZ] において，関数 $m_N^{\gamma}(x)$ や式 (18) で現れる数 $\mathcal{P}_N(\gamma)$ に対する "局所中心極限定理" や "大偏差原理" の精密化に相当する極限定理が調べられているが，上記の問題はその延長線上にある "rare event" の問題の具体的な定式化である．この問題がうまく解決し，さらに極限で得られる $\lambda \in W(v)$ の関数が良い性質を持てば，一般の格子凸多面体上の Dedekind-Riemann 和の漸近挙動に対する我々のアプローチも生きてくるものと思われる．

参考文献

[AI] U. Abel and M. Ivan, *Asymptotic expansion of the multivariate Bernstein polynomials on a simplex*, Approx. Theory and its appl. **16** (2000), no. 3, 85–93.

[B] S. Bernstein, *Démonstration du théoreme de Weierstrass basée sur le calcul des probabilités*, Commun. Soc. Math. Kharkow (2) **13** (1912–1913), 1–2.

[D] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings, I*, J. Diff. Geom. **59** (2001), 479–522.

[Fu] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, in: Annals of Mathematics Study, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[GKP] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (2nd ed.), Addison-Wasley Publ., Reading, MA, 1994.

[GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994.

[Gu] V. Guillemin, *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, PM 122, Birkhäuser, Boston, 1994.

[GS] V. Guillemin and S. Sternberg, *Riemann Sums over Polytopes*, arXiv:math.CO/0608171.

[Hö1] L. Hörmander, *The Analysis of Partial Differential Operators*, vol. I (2nd ed.), Springer Verlag, Berlin, 1990.

[Hö2] L. Hörmander, *The multinomial distribution and some Bergman kernels*, Contemporary Mathematics, vol. **368**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 249–265.

[I] K. Ito, *Introduction to probability theory* (English ed.) Cambridge Univ. Press, 1984.

[Lo] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials* (2nd ed.), Chelsea Publishing Co., New York, 1986.

[STZ] B. Shiffman, T. Tate and S. Zelditch, *Distribution laws for integrable eigenfunctions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 5, 1497–1546.

[Sz] O. Szasz, *Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval*, J. Research of the National Bureau of Standards, vol. **45**, No. 3 September (1950), 239–244.

[T] T. Tate, *Bernstein measures on convex polytopes*, preprint, 2008 (arXiv:math.FA/0805.3379v1).

[TZ] T. Tate and S. Zelditch, *Lattice path combinatorics and asymptotics of multiplicities of weights in tensor powers*, J. Funct. Anal. **217** (2004), no. 2, 402–447.

[Z1] S. Zelditch, *Szegö Kernels and a Theorem of Tian*, Int. Math. Res. Notices, 1998, No. 6, 317–331.

[Z2] S. Zelditch, *Bernstein polynomials, Bergman kernels and toric Kähler varieties*, arXiv:math.CV/0705.2879.